Homework #7

截止日期：6 月 1 日 0:00 之前

问题 #1

设 G 为一个无向图，其拉普拉斯矩阵为 L，具有第二小的特征值 λ_2。从课堂上我们知道，如果 G 是连通的，则 $\lambda_2 > 0$。

1. 通过分析所有与向量 $\mathbf{1}$ 正交的测试向量 x 上的瑞利商 (Rayleigh quotient)，证明:
   (a) 当 G 是连通且无权图时，有 $\lambda_2 \geq 1/\mathrm{poly}(n)$。
   (b) 附加题：证明更好的下界 $\lambda_2 \geq 1/O(rn) \geq 1/O(n^2)$，其中 r 为图的直径（即图中顶点对之间的最大最短路径距离），并且进一步证明当 G 是简单 d 正则图时，有 $\lambda_2 \geq d/O(n^2)$.
2. 通过分析以下的 d 正则图，证明对于所有可能的 r、d 和 n，(1a) 中的界 $1/O(rn)$ 和 $d/O(n^2)$ 都是紧的：为简单起见，假设 $(d+1)|n$，并且令 $k = n/(d+1)$。对于 $i = 1, \ldots, n/k$，令 H_i 是完全图（无自环），其中有一条边 (u_i, v_i) 被移除。令 G 是由 $H_1, \ldots, H_k$ 的不相交并集形成的 d-正则图，并通过添加若干边 $(v_1, u_2), (v_2, u_3), \ldots, (v_{k-1}, u_k), (v_k, u_1)$ 将它们连接成一个环。

问题 #2

如果 G 是具有谱半径 $\alpha := \max\{\alpha_2, |\alpha_n|\}$ 的 d-正则无向图，请证明:

1. G 的最大独立集的大小最多为 $\alpha n/d$。

2. G 的色数至少为 d/α。

提示：可以使用 Expander mixing lemma.

问题 #3

考虑向图中插入一条边。证明或证否以下单调性：

1. 对于插入的任意一条边，任意两个顶点之间的 hitting time 都是单调的。
2. 任意固定顶点 t。从任意其他顶点到 t 的 hitting time 对于插入与 t 相连的边是单调的。
3. 对于插入的任意边，任意两个顶点之间的 commute time 是单调的。

问题 #4

考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的 n 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$.
我们想用直线 $y = ax + b$ 来拟合这些点, 并且希望达成以下目标

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} |y_i - (a + bx_i)| .$$

请写出一个线性规划来解决上面的问题.