Homework #6

截止日期：5 月 18 日 0:00 之前

问题 #1 (Hall's drawing)

(1) 考虑把图画在一条线上，我们使用向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 表示一种画法：x_i 代表点 i 画在 $\mathbb{R}$ 上的位置。我们的目标是最小化 $\boldsymbol{x}^\top L\boldsymbol{x} = \sum_{ij\in E}(x_i - x_j)^2$，其中 L 是图的 Laplacian 矩阵；注意到 $\boldsymbol{x}+\mathbf{1}$ 是等价于 $\boldsymbol{x}$ 的（仅仅是做了一个平移, $\mathbf{1}$ 是全 1 向量），因此不妨考虑 $\langle \boldsymbol{x}, \mathbf{1}\rangle = 0$ 的答案。请用 L 的特征向量写出这样的 $\boldsymbol{x}$。

(2) 如果想把图画在平面上，假设我们使用向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 来表示一种画法：(x_i, y_i) 代表点 i 画在平面 $\mathbb{R}^2$ 上的位置。我们的目标是最小化一个类似的 2-范数：$\sum_{ij\in E}\left\|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\right\|_2^2$；类似地，不失一般性地可以假设 $\langle \mathbf{1}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$ 和 $\langle \mathbf{1}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$. 请用 L 的特征向量写出这样的 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$。如果额外地要求 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 是正交的话，你的答案会有什么变化？

问题 #2

1. 证明 conductance $\phi(S)$ 可以被解释为 $\mathbf{Pr}\left[X_1 \notin S | X_0 \sim \pi_S\right]$, 即从 π 限制在 S 上进行抽样得到的 X_0 开始的随机游走在一步中逃离 S 的概率.
2. 请证明 $\mathbf{Pr}\left[X_t \in S | X_0 \sim \pi_S\right] \geq (1 - \phi(S))^t$.

问题 #3

设 A 是一个无向图的邻接矩阵，α_1 是它的最大特征值。

1. 我们在课上证明了 $\alpha_1 \le d_{\max}$。你能否证明 $\alpha_1 \ge d_{\text{avg}}$? 这里 $d_{\text{avg}} := \frac{|E|}{|V|}$ 表示图的平均度数。

2. 图的色数 (chromatic number) $\chi(G)$ ，是给所有顶点着色，使得任意两个相邻的顶点颜色不同的所有着色方案中，所需的最小颜色数。证明 $\chi(G) \le \lfloor \alpha_1 \rfloor + 1$。你能否设计一个算法来产生这样的着色方案?

问题 #4

证明以下两个命题中的一个:

1. 设 G 是一个连通图，$\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_n$ 是它的邻接矩阵 A 的特征值。证明当且仅当 G 是二分图时，有 $\alpha_1 = -\alpha_n$。

   (提示：你可以使用 Perron-Frobenius 定理，该定理意味着对于无向图 G，我们有 $\forall i, \alpha_1 \ge |\alpha_i|$。)

2. 设 G 是一个连通图，$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$ 是它的归一化拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L} = D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}}$ 的特征值。证明当且仅当 G 是二分图时，有 $\lambda_n = 2$。