

## Homework #2

截止日期: 3 月 16 日 0:00 之前

### 问题 #1

假设函数  $g$  为二次可导函数, 且  $r$  为  $g(r) = r$  的一个不动点, 满足  $g'(r) = 0, |g''(r)| < 2$ . 试证明由  $g$  定义的不动点迭代方程  $x_{k+1} = g(x_k)$  在  $r$  的一个邻域上二次收敛。

### 问题 # 2

在这个问题中, 我们会研究 Newton-Raphson 除法. 因为快速收敛, 它通常会被用于硬件实现, 用来做 IEEE-754 浮点算术运算.

1. 给定  $a \in \mathbb{R}$ , 请说明  $\frac{1}{a}$  要如何用牛顿法迭代计算. 请写出你的迭代公式, 并使用最多两次乘法, 一次加法或减法, 不允许使用除法.
2. 另  $x_k$  是在第  $k$  次牛顿法的迭代中, 对  $\frac{1}{a}$  的估计. 如果我们定义  $\varepsilon_k := ax_k - 1$ , 请证明  $\varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_k^2$ .
3. 大致要进行多少轮的牛顿法的迭代, 才能将计算  $\frac{1}{a}$  的结果精确到  $1/2^d$ ? 假设  $|\varepsilon_0| < 1$ , 请用一个  $\varepsilon_0$  和  $d$  的式子作为你的答案.
4. 这个计算  $\frac{1}{a}$  的方法是否总是收敛, 而与迭代的初始猜测值无关?

### 问题 # 3

考虑一个多项式  $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ . 不失一般性, 假设  $k \geq 1$  并且  $a_k \neq 0$ .

1. 假设  $p'(x)$  在区间  $(a, b)$  没有根, 那么  $p(x)$  在  $(a, b)$  能有多少根?
2. 利用 (1) 中的结果, 请给出一个迭代算法来估计  $p(x)$  的所有根. (假设我们知道  $p(x)$  的所有根都在区间  $[a, b]$  中, 并且他们之间的距离至少是  $\varepsilon$ .)

## 问题 # 4

假设 Alice 想要传输一个含有  $n$  个符号的信息, 使得 Bob 可以检测到在传输过程中发生的错误 (不需要纠正)。即 Alice 想找到一种编码, 她将想发送的信息按照这种方式编码后发送给 Bob, 使得 Bob 在收到编码时: 要么判断出没有错误, 并对信息进行解码; 要么意识到传输的信息中至少包含一个字符错误, 并丢弃该信息。

假设我们能保证传输过程中最多有  $k$  个符号的错误, Alice 应该如何扩展她的信息? 她应该添加多少个符号, 以及如何选择这些符号? 不妨假设我们在有限域  $\text{GF}(p)$  上考虑这个问题, 其中  $p$  是一个充分大的素数。证明你的方案可行, 并证明任何添加更少符号的方案都无法满足要求。