Homework #2

截止日期：3 月 26 日 23:59 之前

问题 # 1

在这个问题中, 我们会研究 Newton-Raphson 除法. 因为快速收敛, 它通常会被用于硬件实现, 用来做 IEEE-754 浮点算术运算.

1. 给定 $a \in \mathbb{R}$，请说明 $\frac{1}{a}$ 要如何用牛顿法迭代计算. 请写出你的迭代公式, 并使用最多两次乘法, 一次加法或减法, 不允许使用除法.

2. 令 x_k 是在第 k 次牛顿法的迭代中, 对 $\frac{1}{a}$ 的估计. 如果我们定义 $\varepsilon_k := ax_k - 1$, 请证明 $\varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_k^2$.

3. 大致要进行多少轮的牛顿法的迭代, 才能将计算 $\frac{1}{a}$ 的结果精确到 $1/2^d$? 假设 $|\varepsilon_0| < 1$, 请用一个 ε_0 和 d 的式子作为你的答案.

4. 这个计算 $\frac{1}{a}$ 的方法是否总是收敛，而与迭代的初始猜测值无关?

问题 # 2

考虑一个多项式 $p(x) = a_k x^k + \cdots a_1 x + a_0$. 不失一般性, 假设 $k \geq 1$ 并且 $a_k \neq 0$.

1. 假设 $p'(x)$ 在区间 (a, b) 没有根, 那么 $p(x)$ 在 (a, b) 能有多少根?

2. 利用 (1) 中的结果, 请给出一个迭代算法来估计 $p(x)$ 的所有根. (假设我们知道 $p(x)$ 的所有根都在区间 $[a, b]$ 中, 并且他们之间的距离至少是 ε.)

问题 # 3

假设 Alice 想要传输一个含有 n 个符号的信息，使得 Bob 可以**检测**到在传输过程中发生的错误（不需要纠正）。即 Alice 想找到一种编码，她将想发送的信息按照这种方式编码后发送给 Bob，使得 Bob 在收到编码时：要么判断出没有错误，并对信息进行解码；要么意识到传输的信息中至少包含一个字符错误，并丢弃该信息。

假设我们能保证传输过程中最多有 k 个符号的错误，Alice 应该如何扩展她的信息？她应该添加多少个符号，以及如何选择这些符号？不妨假设我们在有限域 $\mathrm{GF}(p)$ 上考虑这个问题，其中 p 是一个充分大的素数。证明你的方案可行，并证明任何添加更少符号的方案都无法满足要求。

问题 #4

考虑切比雪夫多项式 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 对于多项式集合 S, 令 $\mathrm{span}(S)$ 表示所有能够通过 S 中的多项式进行有限次线性组合之后得到的多项式的集合.

1. 对于任意整数 $n \geq 0$, 请构造矩阵 $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, 使得 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}$, 其中 $\boldsymbol{x} = [1\ x^1\ x^2\ \cdots\ x^n]^\intercal$, $\boldsymbol{t} = [T_0(x)\ T_1(x)\ T_2(x)\ \cdots\ T_n(x)]^\intercal$ (不必写出 A 的精确形式, 只需给出构造方法).

2. 证明对于任意整数 $n \geq 0$ 都有,

$$\mathrm{span}\left\{T_i(x)\right\}_{i=0}^{n} = \mathrm{span}\left\{x^i\right\}_{i=0}^{n}.$$

3. 证明 $\{T_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 在内积,

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

的意义下构成多项式的一组正交基, 换言之，任意一个多项式可以通过 $T_n(x)$ 的线性组合表示出来，并且对于 $i \neq j$，$T_i(x)$ 与 $T_j(x)$ 是正交的.

问题 #5

对任意函数 $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, 考虑内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

请对多项式族 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 在内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 下做 Gram-Schmidt 正交化, 并写出在该内积下，该多项式族张成的线性空间的一组正交基.